1º Teste (ímpares) Estimação 02/10/2020

Questão aberta:

1. Seja X uma variável aleatória discreta para a qual existem valor esperado e variância. Sabe-se que $E(X) = 2\theta + 1$, com θ parâmetro desconhecido a verificar $0 < \theta < 0.5$. [30 pontos]

   Determine o estimador pelo método dos momentos para θ e estude-o quanto ao enviesamento e consistência.

   Um só parâmetro a estimar, então:

   $E(X) = 2\theta + 1 = \bar{X} \Leftrightarrow \tilde{\theta}_{(X_1,X_2,\cdots,X_n)} = \frac{\bar{X}-1}{2}$ é o estimador pelo método dos momentos para o parâmetro θ.

$$E\left(\tilde{\theta}_{(X_1,X_2,\cdots,X_n)}\right) = E\left(\frac{\bar{X}-1}{2}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}[E(\bar{X}) - 1] = \frac{1}{2}[\mu - 1]}_{porque\ E(\bar{X})=\mu} = \frac{2\theta + 1 - 1}{2} = \theta$$

   Então $\tilde{\theta}_{(X_1,X_2,\cdots,X_n)}$ é um estimador não enviesado para θ.

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\tilde{\theta}_{(X_1,X_2,\cdots,X_n)}\right) = \lim_{n\to\infty} E\left(\frac{\bar{X}-1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \theta = \theta$$

$$\lim_{n\to\infty} Var\left(\tilde{\theta}_{(X_1,X_2,\cdots,X_n)}\right) = \lim_{n\to\infty} Var\left(\frac{\bar{X}-1}{2}\right) = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} Var(\bar{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{4n} = 0$$

   Então $\tilde{\theta}_{(X_1,X_2,\cdots,X_n)}$ é um estimador consistente para θ.

2. Uma empresa disponibiliza um serviço de correio electrónico para os seus clientes. Grande parte das reclamações recebidas na empresa relacionam-se com o tempo de espera, em segundos, até à obtenção de uma resposta. Para estudar esta questão recolheu-se uma amostra casual de dimensão 100, tendo-se obtido: [30 pontos]

$$\bar{x} = 17, s' = 6$$

3. Construa um intervalo de confiança a 90% para o tempo médio de espera? Com base no resultado obtido poder-se-á afirmar que o tempo médio de espera não ultrapassa os 20 segundos? [30 pontos]

> Muito importante, porque como não é dada a distribuição da população, só se pode usar a variável fulcral T porque a amostra é grande e portanto pode considerar-se a população como assintóticamente normal

$$X - \text{tempo de espera, em segundos, até à obtenção de uma resposta} \underbrace{\dot{\sim} N\Big(\underbrace{\mu, \sigma^2}_{desconhecidos}\Big)}_{5}$$

$$Variável\ fulcral: T = \frac{\bar{X}-\mu}{S'/\sqrt{n}} \dot{\sim} N(0,1)$$

$$1 - \alpha = 0.9 \underset{\Rightarrow}{\Leftrightarrow} \alpha = 0.1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05$$

Cálculo $z\alpha/_2$:

$$P\left(-z\alpha/_2 < Z < t_z\right) = 0.90 \Rightarrow z\alpha/_2 = invnorm(0.05,90) = 1.645$$

Para os alunos que usaram tabelas para calcular, com n=100, vem $t\alpha/_2 = 1.66$

Intervalo aleatório: $\left(\bar{X} - t\alpha/_2\, S'/\sqrt{n},\ \bar{X} + t\alpha/_2\, S'/\sqrt{n}\right)$

$$IC_\mu^{90\%} = \left(\bar{x} - z\alpha/_2\, s'/\sqrt{n}, \bar{x} + z\alpha/_2\, s'/\sqrt{n}\right) = \left(17 - 1.645 * \frac{6}{\sqrt{100}}, 17 + 1.645 * \frac{6}{\sqrt{100}}\right)$$

$$= (16.013, 17.987)$$

Sim, **porque num grande número de $IC_\mu^{90\%}$ calculados, em 90% deles a média pertence ao $IC_\mu^{90\%}$** pelo que será inferior a 20 segundos